PROBEKLAUSUR 07/08

2. Die Polynome $2+T^2$ und $3+T$ liegen in U. Wir zeigen, dass $(2+T^2, 3+T)$ eine Basis von U ist.

Erzeugendensystem: Sei $2a+3b+bT+aT^2 \in U$. Dann gilt

$$2a+3b+bT+aT^2 = a(2+T^2)+b(3+T),$$

und es folgt, dass $(2+T^2, 3+T)$ ein Erzeugendensystem von U ist.

Lineare Unabhängigkeit: Die beiden Polynome $2+T^2$ und $3+T$ sind keine Vielfachen voneinander. Es folgt, dass sie linear unabhängig sind.

Da die Polynome in U liegen, ein Erzeugendensystem von U bilden und linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U.

Nachklausur 07/08

2. Mit $a=1$ und $b=0$ gilt $1+T^2+T^3 \in U$, und mit $a=0$ und $b=1$ gilt $T+T^3 \in U$. Diese Polynome sind linear unabhängig, denn sie sind keine Vielfachen voneinander. Wir zeigen nun, dass sie auch ein Erzeugendensystem von U bilden. Dazu sei $a+bT+aT^2+(a+b)T^3 \in U$. Dann gilt $a+bT+aT^2+(a+b)T^3 = a(1+T^2+T^3)+b(T+T^3)$, somit ist jedes Polynom in U eine Linearkombination der Polynome $1+T^2+T^3$ und $T+T^3$. Es folgt, dass $1+T^2+T^3, T+T^3$ eine Basis von U ist.

ws 08/09

2. Es ist $(1, T, T^2)$ eine Basis von V. Es gilt $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $f(T^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Wir überprüfen, ob die Matrizen linear unabhängig sind. Dafür seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2c \\ -c & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $c=0$ und $b-a=0$, also $b=a$. Aus $a+b=2a=0$ folgt $a=0$, und damit $b=0$. Somit sind die Matrizen linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

ws 09/10

2. Wir setzen die Standardbasisvektoren von $M_{22}(\mathbb{R})$ in f ein und erhalten

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} &= A_1\\ f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} &= A_2\\ f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} &= A_3\\ f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} &= A_4. \end{aligned}$$

Diese Matrizen bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Wir zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Dazu seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a&b+c&d\\b&a+d&a\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgt $a = d = b = 0$, also $c = 0$. Die Matrizen sind also linear unabhängig und bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$. Somit sind sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

ws 10/11

2. Seien $A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Die Matrizen A, B und C liegen in V_2. Wir zeigen, dass (A, B, C) eine Basis von V_2 ist. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit

$$aA + bB + cC = \begin{pmatrix}0&a\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\b&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c&0\\0&-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c&a\\b&-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Dann folgt $a = b = c = 0$, und somit sind A, B und C linear unabhängig.

Sei $A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} \in V_2$. Dann gilt $\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} = 0$, also $a_{22} = -a_{11}$. Es folgt

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&-a_{11}\end{pmatrix} = a_{11}C + a_{12}A + a_{21}B.$$

Somit ist (A, B, C) auch ein Erzeugendensystem von V_2, und es folgt, dass (A, B, C) eine Basis von V_2 ist.

ws 14/15

Aufgabe 3

Einfacher als das sich aufdrängende $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ist z.B. die Wahl $x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; aus $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ folgt dann

$$\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+b\\b+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} ,$$

also $a = 0$ und dann der Reihe nach auch $b = 0$ und $c = 0$. x_1, x_2 und x_3 sind somit linear unabhängig und bilden (als drei linear unabhängige Vektoren im dreidimensionalen $\mathbb{R}^3$) eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

ss 16

Aufgabe 3

(a) Wir überführen A in Treppennormalform. Dazu addieren wir das 2-fache der ersten Zeile zur zweiten und die erste Zeile zur dritten. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun multiplizieren wir die zweite Zeile mit $\frac{1}{3}$. Das ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zum Schluss wird noch die zweite Zeile von der ersten subtrahiert und das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Treppennormalform von A. Um die Lösungsmenge von Ax=0 zu ermitteln, streichen wir nun in der Treppennormalform die Nullzeile und füllen dann so mit Nullzeilen auf, dass die Matrix quadratisch ist und die Pivotelemente auf der Diagonalen stehen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ersetzen wir die Nullen auf der Diagonalem durch -1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und lesen die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ bzw. eine Basis der Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

mit Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Die Basis $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ von $\mathcal{L}$ kann zum Beispiel durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden. Wir zeigen, dass die 4 Vektoren linear unabhängig sind. Dazu seinen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$a + c = 0, a = 0, b = 0, -b + d = 0$$

und damit auch $a = b = c = d = 0$. Also sind die 4 Vektoren linear unabhängig und, da 4 linear unabhängige Vektoren in einem 4-dimensionalen Raum eine Basis bilden, auch eine Basis.

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ können durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis ergänzt werden.

ws 16/17

Aufgabe 3

Es ist

$$x = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \text{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{pmatrix}a+b+c & a-b\\ 2a+c & 2b+c\end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; b = a, c = -2a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix}a\\a\\-2a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \;(a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}),$$

also $\text{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$. $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ ist als einzelner Vektor linear unabhängig, bildet also eine Basis von $\text{Kern}(f)$. Dieser Vektor kann durch zwei beliebige Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^3$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden; z.B. sind $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ linear unabhängig, denn aus $a\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ folgt $a+b = 0, a+c = 0, -2a = 0$, also $a = b = c = 0$.

Damit bilden (z.B.) $f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$ und $f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$, d.h. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ eine Basis von $\text{Bild}(f)$.

ws 18/19

Aufgabe 3

Es ist

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -x_1, x_3 = x_4$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; (x_1, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \;,$$

also $\text{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, denn es gilt

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_3 = 0 \;,$$

sie bilden also eine Basis von $\text{Kern}(f)$. Diese Vektoren können z.B. durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden; es ist

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ -a \\ b + d \\ b \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = c = d = 0 \;,$$

also sind die Vektoren linear unabhängig. Damit bilden

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\text{Bild}(f)$ (was man aber auch direkt hätte zeigen können).

Es ist $\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, wie es der Rangsatz aussagt.

2. (a) Die Vektoren der Menge M_1 sind linear unabhängig. Um das zu zeigen seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ -b \\ a-c \\ 3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a+2b=0, -b=0, a-c=0$ und $3b+2c=0$. Aus der zweiten Gleichung folgt sofort $b=0$ und damit aus der ersten Gleichung $a=0$ und aus der vierten Gleichung $c=0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

(b) Die Vektoren aus der Menge M_2 sind linear abhängig. Um das zu zeigen, benötigt man eine Linearkombination der Vektoren, die den Nullvektor ergibt und in der nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind. Entweder findet man diese Linearkombination durch Ausprobieren oder rechnet sie aus. Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ -b+c \\ a-b+3c \\ 5b-5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a+2b=0, -b+c=0, a-b+3c=0$ und $5b-5c=0$. Hier ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das man mit den im Kurs gelernten Methoden lösen kann. Man sieht aber auch so ziemlich schnell, dass aus der zweiten und vierten Gleichung $b=c$ folgt. Das in die dritte Gleichung eingesetzt ergibt $a+2b=0$, also genau die erste Gleichung. Eine Lösung dieser Gleichung wäre $a=2$ und $b=-1$. Mit $b=c$ folgt dan auch $c=-1$. Und tatsächlich ist

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die Vektoren linear abhängig.